CAMINATAS ALEATORIAS COMO UNA APLICACIÓN DEL PRODUCTO DE MATRICES

Eje 3: Interdisciplina y articulación entre materias

María Valeria Calandra[1,2], Alejandro Mesón[2]

[1]Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP.

[2]UIDET Gamefi, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP.

mava@mate.unlp.edu.ar

Palabras claves: CAMINATAS ALEATORIAS, PROBABILIDADES, MATRICES, ALGEBRA, ARTICULACIÓN.

RESUMEN

En general las materias probabilidades y algebra, a pesar de tener muchos puntos comunes, no tienen una vinculación adecuada en lo que respecta a los aspectos de su enseñanza. Para que los alumnos encuentren un buen correlato entre las asignaturas es deseable incorporar, a las mismas, ejemplos de aplicación que muestren la existencia de estas vinculaciones, que por otro lado beneficiarán su enseñanza.

Por ejemplo, un problema de interés en probabilidades es el de las caminatas aleatorias. En esta presentación se analizará el caso de una partícula que parte de un punto y se desplaza por etapas o pasos a lo largo de una recta, en cada paso se mueve una distancia unitaria hacia la derecha o hacia la izquierda, con probabilidades respectivamente iguales a p y a q = 1-p, siendo $0 < p < 1$. Supondremos además que la partícula se mueve k pasos en total. Una pregunta de interés podría ser: ¿Cuál es la media y la varianza de la posición de la partícula respecto del punto de partida?, o ¿cuál es el número medio de retornos al punto de partida? En este trabajo veremos cómo abordar alguna de estas preguntas como una aplicación del producto de matrices y a su vez la articulación de distintos registros de representación.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA ESTOCASTICO

Este trabajo nos parece importante ya que, desde la perspectiva de las teorías didácticas de la enseñanza, Duval (1998) sostiene que para la comprensión de un concepto es necesario coordinar al menos dos registros de representación que permitan distintos tratamientos. En este caso se proponen dos registros de representación algebraicos diferentes, uno desde el punto de vista puramente estocástico y otro desde el punto de vista matricial. Comenzaremos con la descripción desde el punto de vista estocástico. Un problema de probabilidades de estudio habitual sobre todo para alumnos de Ciencias Exactas que cursan probabilidades es el de los recorridos aleatorios. Dentro de esta temática uno de los recorridos más sencillos es el siguiente. Consideremos el recorrido aleatorio de una partícula que parte de un punto inicial que denotaremos con X_0 y que se desplaza por etapas o pasos unitarios hacia la derecha o hacia la izquierda. Sus posibles localizaciones son el conjunto de los números enteros a los que llamaremos estados o espacio de estados.

Si representamos con la variable aleatoria X_n su posición en el instante n-ésimo. Su trayectoria es un camino zigzagueante del tipo de la representación de la Figura 1.

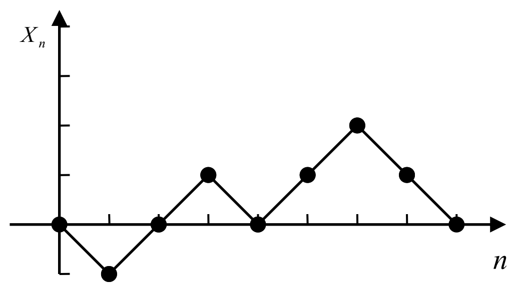

Figura 1. Ejemplo de una trayectoria aleatoria, con inicio en el origen de coordenadas.

Matemáticamente y desde el punto de vista estocástico, el recorrido aleatorio está representado por una sucesión de variables aleatorias X_n con $n \in N$ y se denomina proceso estocástico de tiempo discreto. La sucesión $\{X_n, n\varepsilon N\}$ forma infinitas secuencias $X_0, X_1,......$ con $X_i \in Z$ .Es decir si la partícula inicia su recorrido en el estado 0, al siguiente tiempo la partícula puede pasar a la posición +1 con probabilidad p o a la posición -1 con probabilidad q, con $p + q = 1$.

Una formulación disciplinar habitual es la siguiente. Si ξ_n es el n-ésimo paso o desplazamiento de la partícula

$$\xi_n = \begin{cases} +1 \text{ si la partícula se mueve un paso hacia la derecha} \\ -1 \text{ si la partícula se mueve un paso hacía la izquierda} \end{cases}$$

$$\mathrm{P}(\xi_n = +1) = p \qquad \wedge \qquad \mathrm{P}(\xi_n = -1) = q \qquad \text{(siendo P la función de probabilidad)}$$

Siendo las ξ_n variables aleatorias independientes y *p+q=1*. Como denotamos X_0 su posición inicial, la posición en el instante n (es decir, tras n pasos) es:

$$X_n = X_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_n \qquad (1)$$

De hecho $X_n - X_0$ es una suma de variables aleatorias independientes de Bernoulli muy estudiadas por los alumnos de Ciencias.

Si la partícula da sólo k pasos y queremos responder la pregunta: ¿Cuál es la media y la varianza de la posición de la partícula respecto del punto de partida?

Supondremos primeramente que $X_0 = 0$, es decir que la partícula parte del origen de coordenadas. Es claro que si la partícula puede dar sólo k pasos en total la posición final de la partícula puede llegar a una distancia máxima de k unidades a la izquierda o a la derecha. Ya que $X_0 = 0$ por lo tanto sustituyendo en (1) *n* por *k,* la posición de la partícula después de *K* pasos se puede expresar con la variable aleatoria X_k: $X_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$

Luego la posición esperada respecto del punto de partida se podría calcular usando la propiedad lineal de la esperanza (denotaremos la esperanza con la letra E): $\mathrm{E}(X_k) = \mathrm{E}(\xi_1) + \ldots + \mathrm{E}(\xi_k)$, donde:

$$\mathrm{E}(\xi_i) = \mathrm{P}(X_i = 1) - \mathrm{P}(X_i = -1) = p - q \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,k\} \qquad (2)$$

Por lo tanto $\mathrm{E}(X_k) = k(p-q)$

Del mismo modo se puede calcular varianza (*V*) de la posición respecto del punto de partida: $V(X_k) = V(\xi_1 + \ldots + \xi_k) = V(\xi_1) + \ldots + V(\xi_k)$ (por ser las variables aleatorias ξ_i independientes) y como:

$$V(\xi_i) = (p+q) + (p-q)^2 = 1 + (p-q)^2 = 4pq \text{ para todo } \xi_i \qquad (3)$$

Por lo tanto $V(X_k) = k4pq$

Para el caso particular que p=q=1/2 (caminata aleatoria simétrica) obtenemos $\mathrm{E}(X_k) = 0$ y $V(X_k) = k$.

Si consideramos $X_0 = y \neq 0$, es decir que la partícula no parte del origen de coordenadas, la posición de la partícula después de *K* pasos se puede expresar con la variable aleatoria X_k: $X_k = y + \xi_1 + \ldots + \xi_k$

Luego la posición esperada respecto del punto de partida se podría calcular usando la propiedad lineal de la esperanza.

$\mathrm{E}(X_k) = y + \mathrm{E}(\xi_1) + \ldots + \mathrm{E}(\xi_k)$

Por (2) $\mathrm{E}(X_k) = y + k(p-q)$

$V(X_k) = V(X_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_k) = V(\xi_1) + \ldots + V(\xi_k)$ Esto es por ser las variables aleatorias ξ_i independientes, además como la varianza es invariante por traslación y usando el resultado (3). Luego $V(X_k) = k4pq$

DESCRIPCIÓN MATRICIAL DEL PROBLEMA

Llamaremos *matriz de transición* a una matriz estocástica $P \in \boldsymbol{\mathcal{M}n,n}$ (matrices de n filas y n columnas) que cumple con las siguientes condiciones,

1) $\forall i, j \in \{1,2,\ldots n\}, \quad p_{ij} \geq 0$

2) $\forall i \in \{1,2,\ldots n\}, \quad \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{p}} p_{ij} = 1$

Sea X_n la posición de una partícula en el instante *n* y definamos $I = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, donde los elementos de *I* son los estados de la partícula en el instante n-ésimo, puede ser un conjunto finito o infinito de enteros. En el esquema de una partícula móvil *I* representa el conjunto de estados o posiciones de la partícula en cada instante. Definiremos los elementos de la matriz *P* como: $p_{ij} = \mathrm{P}\left(X_n = E_j \middle| X_{n-1} = E_i\right) = \mathrm{P}\left(X_1 = E_j \middle| X_0 = E_i\right)$, es decir en términos de probabilidad el elemento p_{ij} lo interpretaremos como la probabilidad de que la partícula pase del estado *i*, en el paso *n-1*, al estado *j*, en el paso *n*. Como vemos estas probabilidades son independientes de *n,* lo que llamaremos homogeneidad temporal de las probabilidades de transición (Chung, 1983, p.295).

Se podría demostrar que el proceso estocástico del movimiento de la partícula se puede modelar mediante un sistema de ecuaciones en diferencias, $u^n = u^{n-1}P \quad \forall n \geq 1$, donde *P,* es una matriz estocástica de transición (Feller, 1991). Cada $u^n = (\ u_1^n\ u_2^n \ldots\ldots u_n^n\ )$ es un vector fila que llamaremos vector de probabilidades absolutas y cada una de sus componentes u_i^n con $i \in \{1,2,\ldots n\}$, representa la probabilidad (incondicional) de que el proceso se encuentre en cada estado luego del tiempo *n, es decir* $u_i^n = \mathrm{P}(X_n = E_i)$. En particular, si la partícula parte del estado fijo E_h, el vector fila u^0 tiene componentes: $u_h^0 = 1$ y $u_j^0 = 0 \forall j \neq h$ con $j \in \{1,2,...n\}$.

Luego: $u^1 = u^0 P$

$$u^2 = u^1 P = u^0 PP = u^2 P^2$$

En general, por inducción, considerando $P^0 = I$, se obtiene:

$$u^n = u^0 P^n$$

Los elementos de u^n por lo tanto son: $u_i^n = \sum_{j=1}^{n} u_j^0 p^n{}_{ji} \ \forall i \in \{1,2,...n\}$(Feller, 1991, p.384).

Los elementos de P^n se definen como:

$p^n{}_{ij} = \mathrm{P}\left(X_n = E_j \middle| X_0 = E_i\right) \ \forall i, j \in \{1,2,...n\}$ (Chung, 1983, p.297).

Además, si la partícula parte del estado E_h Los elementos de u^n coinciden con los elementos de la fila *h* de P^n *además* $u^n = (\mathrm{P}(X_n = E_1),......\mathrm{P}(X_n = E_n))$(Feller, 1991, p.384).

Luego para calcular la esperanza y la varianza después de n pasos de la partícula, se deben efectuar los siguientes cálculos:

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{i \in I} E_i \times \mathrm{P}(X_n = E_i) = \sum_{i \in I} E_i \times u_i^n$$

$$\mathrm{E}(X_n^2) = \sum_{i \in I} E_i^2 \times \mathrm{P}(X_n = E_i) = \sum_{i \in I} E_i^2 \times u_i^n$$

$$V(X_n) = \mathrm{E}(X_n^2) - (\mathrm{E}(X_n))^2$$

Supongamos que la partícula parte inicialmente del origen de coordenadas, es decir $X_0 = 0$ y se mueve aleatoriamente, de a un paso por vez, hacia la izquierda con probabilidad *q* o hacia la derecha con probabilidad *p*. Supongamos además que *p+q=1*. Es claro que si la partícula puede dar sólo k pasos en total la posición final de la misma puede llegar a una distancia máxima de *k* unidades a la izquierda o a la derecha. En este proceso la partícula cambia de un estado a otro en dos tiempos consecutivos de acuerdo con las probabilidades de transición que se muestran en la Figura 2 válidas para cualquier *n* y para cualesquiera enteros *i* y *j*.

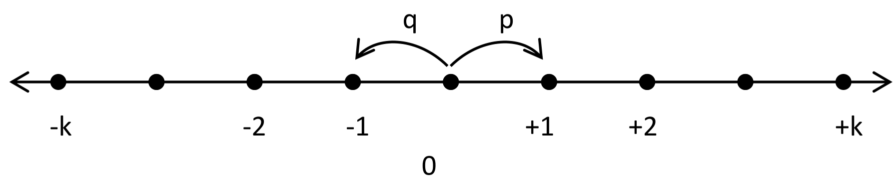

Figura 2. Esquema del movimiento de la partícula según su probabilidad.

EJEMPLO 1

A modo de ejemplo consideremos el problema de la partícula móvil para el caso particular en que la misma puede dar sólo dos pasos en total, es decir $k=2$ y además supongamos $X_0=0$. Luego las posiciones o estados intermedios que puede ir ocupando la partícula a medida que se desplaza en cada instante las denotamos con: $I=\{-2,-1,0,+1,+2\}=\{E_1,E_{21},E_3,E_4,E_5\}$. Por lo tanto, la matriz estocástica de transición toma el aspecto:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En cada uno de los estados *E₂, E₃, E₄* las transiciones son posibles a cada uno de los estados de la derecha y de la izquierda (con $p_{i(i+1)}=p$ y $p_{i(i-1)}=q$). Sin embargo, no hay ninguna transición posible desde E_1 o E_5 hasta ningún otro estado, el sistema puede moverse de un estado a otro, pero una vez que llega a E_1 o E_5, la partícula no se mueve más.

Además, elegimos como distribución inicial de partida de la partícula al vector:

$u^0=(0,0,1,0,0)$ ya que la partícula parte del 0, que corresponde a E_3.

Luego obtenemos: $u^2=u^0 P^2$

Siendo,

$$P^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & pq & 0 & p^2 & 0 \\ q^2 & 0 & 2pq & 0 & p^2 \\ 0 & q^2 & 0 & pq & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y cómo $u^0=(0,0,1,0,0) \quad \Rightarrow u^2=(q^2,0,(2pq),0,p^2)$. Como vemos $u^2=(q^2.0,(2pq),0,p^2)$ **coincide con la fila central de la matriz P^2** y como u^2 es un vector fila en el que cada una de sus componentes representan las probabilidades de que el proceso se encuentre en cada estado $E_i \in I$ luego de dos pasos, tenemos que, $u_i^2 = \mathrm{P}(X_2 = E_i)\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$

Para poder responder la pregunta de interés ¿Cuál es la media y la varianza de la posición de la partícula respecto del punto de partida?, debemos realizar los siguientes cálculos:

$$\mathrm{E}(X_2) = \sum_{i \in I} i \times \mathrm{P}(X_2 = E_i) = \sum_{i=1}^{5} (i-3) \times u_i^2 = -2 \times q^2 + 2 \times p^2 = 2(q^2 - p^2) = 2(q-p)$$

$$\mathrm{E}(X_2^2) = \sum_{i \in I} i^2 \times \mathrm{P}(X_2 = i) = \sum_{i=1}^{5} (i-3)^2 \times u_i^2 = 4 \times q^2 + 4 \times p^2 = 4(q^2 + p^2)$$

Y como, $V(X_2) = \mathrm{E}(X_2^2) - \mathrm{E}^2(X_2)$, luego $V(X_2) = 4(q^2 + p^2) - 4(q-p)^2 = 8pq$

EJEMPLO 2

Ahora consideramos que la partícula parte de $X_0 = 0$ y se mueve k pasos en total. La posición que ocupa la partícula en el instante i-ésimo la denotamos X_i $\forall i \in \{1,2....k-1,k....2k+1\}$. Es decir $X_i \in I\ \forall i \in \{1,2....k-1,k....2k+1\}$ con $I = \{-k,\ldots,-2,-1,0,+1,+2,\ldots,+k\} = \{E_1, E_2,...E_{K-2}E_{K-1}, E_K, E_{K+1}, E_{K+2},..., E_{2K+1}\}$

La matriz estocástica de transición P tomaría la siguiente forma,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ q & 0 & p & 0 & . & . & . & . \\ 0 & q & 0 & p & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & q & 0 & p \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz posee *2k+1* filas y *2k+1*columnas y sus elementos representan: $p_{ij} = \mathrm{P}\left(X_n = E_j \middle| X_{n-1} = E_i\right)\ \forall i,j \in \{1,2....k-1,k....2k+1\}$

Para calcular $\mathrm{E}(X_k)$ y $V(X_K)$ alcanza con obtener las componentes de u^k **que coinciden con la fila *k+1* de la matriz P^K** debido a que u_0 es un vector con un 1 en la componente *k+1* y con los demás elementos nulos:

$$\mathrm{P}(X_K = E_i) = u_i^k = \sum_{j=1}^{k} u_j^0 p^k = p^k{}_{k+1,i} = \mathrm{P}\left(X_k = E_i \middle| X_0 = E_{k+1}\right)\ \forall i \in \{1,2....k-1,k,..2k+1\}$$

O análogamente, $\mathrm{P}(X_k = i) = u_{i+k+1}^k = \mathrm{P}\left(X_k = i \middle| X_0 = 0\right)\ \forall i \in \{-k,\ldots,-2,-1,0,+1,+2,\ldots,+k\}$

Y se puede demostrar que para cualquier número entero *k (fijo)* con $i \in \{-k,\ldots,-2,-1,0,+1,+2,\ldots,+k\}$, y para el caso en el que *i* y *k* sean simultáneamente pares o impares:

$$\mathrm{P}\left(X_k = i \middle| X_0 = 0\right) = \binom{k}{1/2(k+i)} p^{1/2(k+i)} q^{1/2(k-i)} \qquad (3)$$

Para valores de i y k que no cumplen las condiciones indicadas la probabilidad en cuestión vale cero. (ver Proposición 1)

Y luego como $\mathrm{P}(X_k = i) = u_{i+k+1}^k = \mathrm{P}\left(X_k = i \middle| X_0 = 0\right) \quad \forall i \in \{-k,\ldots,-2,-1,0,+1,+2,\ldots,+k\}$

Por lo tanto, usando el resultado(3)

$u_{i+k+1}^k = \binom{k}{1/2(k+i)} p^{1/2(k+i)}\ q^{1/2(k-i)}\ \forall i \in \{-k,\ldots,-2,-1,0,+1,+2,\ldots,+k\}$, (siempre que *i* y *k* sean ambos pares o ambos impares en caso contrario $u_{i+k+1}^k = 0$).

Luego para calcular la posición esperada por la partícula, se deben realizar los siguientes cálculos: $\mathrm{E}(X_K) = \sum_{i \in I} i \times \mathrm{P}(X_K = i) = \sum_{i=1}^{2k+1} (-k+i-1) p_{k+1,i}^k = \sum_{i \in I} i \times u_{i+k+1}$

$$\mathrm{E}(X_K^2) = \sum_{i \in I} i^2 \times \mathrm{P}(X_K = i) = \sum_{i=1}^{2k+1} (-k+i-1)^2\, p_{k+1,i}^k = \sum_{i \in I} i^2 \times u_{i+k+1}^k$$

$$V(X_K) = \mathrm{E}(X_K^2) - \mathrm{E}^2(X_K)$$

Para el caso *k=8, p=1/2* y *q=1/2* por ejemplo se puede obtener $\mathrm{E}(X_K) = 0\ \ V(X_K) = 8$

EJEMPLO 3

Si consideramos que $X_0 = y \neq 0$. Luego el conjunto de estados o posiciones que puede ocupar la partícula paso a paso es:

$I = \{y-k,\ldots,y-2,y-1,y,y+1,y+2,\ldots,y+k\} = \{E_1^*,\ldots,,E_{K-2}^*,E_{K-1}^* E_K^*,,\ldots,E_{2K+1}^*\}$ y la matriz estocástica de transición P sería la misma que cuando $X_0 = 0$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ q & 0 & p & 0 & . & . & . & . \\ 0 & q & 0 & p & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & q & 0 & p \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero ahora los elemento p_{ij} representa las probabilidades de transición entre los estados del nuevo conjunto I, es decir: $p_{ij} = \mathrm{P}\left(X_n = E_j^* \middle| X_{n-1} = E_i^*\right) \forall i, j \in \{1,2....k-1, k....2k+1\}$

Y para calcular $\mathrm{E}(X_k)$ y $V(X_K)$ alcanza con calcular las componentes de u^k que coinciden con la fila $k+1$ de la matriz P^K debido a que u_0 es un vector con un 1 en la componente $k+1$ y con los demás elementos nulos.

Pero P^k y u^k resultan también ser las mismas que en el ejemplo 2.

Y luego como $\mathrm{P}(X_k = i + y) = u_{i+k+1}^k \;\forall i \in \{-k, \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots, +k\}$

Por lo tanto $u_{i+k+1}^k = \binom{k}{1/2(k+i)} p^{1/2(k+i)} q^{1/2(k-i)} \;\forall i \in \{-k, \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots, +k\}$, es el mismo vector que en el caso anterior.(siempre que i y k sean ambos pares o ambos impares, en caso contrario $u_{i+k+1}^k = 0$).

Sea $H = \{-k, \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots, +k\}$

$$\mathrm{E}(X_K) = \sum_{i \in H} (i + y) \times \mathrm{P}(X_K = E_i^*) = \sum_{i \in H} (i + y) \times u_{i+k+1}$$

$$\mathrm{E}(X_K^2) = \sum_{i \in H} (i + y)^2 \times \mathrm{P}(X_K = E_i^*) = \sum_{i \in H} (i + y)^2 \times u_{i+k+1}$$

Y luego: $V(X_K) = \mathrm{E}(X_K^2) - \mathrm{E}^2(X_K)$

Para el caso $k=8$, $p=1/2$ y $q=1/2$ por ejemplo se puede obtener $\mathrm{E}(X_K) = y$ $V(X_K) = 8$

PROPOSICIÓN 1

Para cualesquiera números enteros i y k tal que $-k \le i \le k$, y para el caso cuando i y k son ambos pares o ambos impares, $\mathrm{P}\left(X_k = i \middle| X_0 = 0\right) = \binom{k}{1/2(k+i)} p^{1/2(k+i)} q^{1/2(k-i)}$

Para valores de i y k que no cumplen las condiciones indicadas la probabilidad en cuestión vale cero.

Demostración

Suponga que se observa la posición de la partícula que parte de $X_0 = 0$ después de efectuar k pasos denotada con X_k. Sean R_k y L_k el número de pasos realizados hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente. Entonces $X_k = R_k - L_k$, y además $k = R_k + L_k$. Sumando estas dos ecuaciones y substituyendo la expresión de (3) $X_k = \sum_{j=1}^k \xi_j$ se obtiene

$$R_k = \frac{1}{2}\left(k + X_k\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2}\left(1 + \xi_j\right)$$

Esta ecuación es la identidad clave para obtener el resultado buscado. Observe que esta fórmula arroja un valor entero para R_k cuando k y X_k son ambos pares o ambos impares. Como las variables independientes ξ_j toman los valores +1 y -1 con probabilidades p y q respectivamente, entonces las variables independientes $\frac{1}{2}\left(1+\xi_j\right)$ toman los valores 1 y 0 con probabilidades p y q. Esto lleva a la conclusión de que la variable R_k tiene distribución binomial *(k,p)*. Por lo tanto, para cualquier valor de k que cumpla las condiciones enunciadas se tiene que: $\mathrm{P}\left(X_k = i \middle| X_0 = 0\right) = \mathrm{P}\left(R_k = \frac{1}{2}(k+i)\right) = \binom{k}{1/2(k+i)} p^{1/2(k+i)} q^{1/2(k-i)}$

CONCLUSIÓN

Esta propuesta nos parece oportuna para alumnos que estén cursando probabilidades como una aplicación de las operaciones con matrices que han estudiado en Álgebra. Si bien el ejemplo 2 y el ejemplo 3 los hemos desarrollado con *k, p y q* genéricos, para su implementación sería conveniente el uso de computadora y proponer valores de *k, p y q* concretos.

El tratamiento y la coordinación de distintas representaciones no se da espontáneamente en los sujetos, se les debe proponer tareas específicas que las favorezcan (Duval, 1998). Para responder la pregunta: ¿Cuál es el número medio de retornos de la partícula al punto de partida?, la propuesta didáctica se podría desarrollar de un modo similar.

BIBLIOGRAFÍA

Chung, K.L. (1983). *Teoría elemental de la probabilidad y de los procesos estocásticos.* Barcelona, España: Editorial Reverté.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 101-120). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Feller, W. (1991). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones.* México: Editorial Limusa.